

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Formale Definitionen und Schließungsbedingungen der χ_{MDR} -Lagrange-Struktur

Dieser Anhang legt alle formalen Definitionen, Normierungen und Modellgrenzen des ISOCH-Wirkungsrahmens fest. Er dient der eindeutigen Identifikation aller im Text verwendeten Größen, ihrer Dynamik, ihrer Kopplungsbedingungen und ihrer normierten Grenzwerte.

Empirische Ableitung und theoretische Einbindung der χ_{MDR} -Drift

Der Trend der Materiedynamikrate χ_{MDR} wurde ausschließlich aus voneinander unabhängigen Beobachtungsreihen ermittelt. Im CMB-Phasen-Shift-Test (Planck-2018-Daten) wurde aus der Phasenlage der akustischen Peaks $n = 1-6$ die erste empirische Fixpunktbestimmung der χ_{MDR} -Drift abgeleitet.

Im zweiten, vollständig unabhängigen Lyman- α -BAO-Test (BOSS / eBOSS, $z = 2.3-2.55$) zeigte sich derselbe Driftverlauf. Beide Datensätze sind physikalisch unabhängig und definieren die beobachtungsbasierte Form der epochenabhängigen Dynamikrate.

Dieser empirisch gefundene Trend wird nicht als Eingabe der Lagrange-Variation verwendet, sondern ausschließlich zur Kalibrierung der freien Parameter des ISOCH-Potentials $V(\chi_{\text{MDR}}, \epsilon)$.

Auf dieser Grundlage ergeben sich sämtliche theoretischen Größen vorhersagbar, darunter die epochenabhängige Energiedichte $\Omega_\chi(\epsilon)$, der Expansionsverlauf $H(\epsilon)$, der lokale H_0 -Wert sowie Residualeffekte in CMB- und BAO-Messungen.

Für jede Berechnung, jedes Fit-Verhältnis und jede abgeleitete Formel wurde ausschließlich diese Vorgehensweise angewandt:

empirische χ_{MDR} -Drift \rightarrow einmalige Potential-Kalibrierung \rightarrow theoretische Vorhersage.

Der Multilinen-Test überprüft die interne Konsistenz dieser Methode, indem er zeigt, dass verschiedene Spektrallinien und Übergänge innerhalb desselben Epochenfensters denselben $\chi_{\text{EPO}}(\epsilon)$ -Normierungsverlauf ergeben. Der Validierungstest bestätigt anschließend, dass das einmal kalibrierte Potential $V(\chi_{\text{MDR}}, \epsilon)$ ohne erneute Anpassung sämtliche beobachteten Epochenrelationen reproduziert.

Damit ist ausgeschlossen, dass empirische Relationen mehrfach verwendet werden oder als ISOCH-Vorhersagen erscheinen. Das gesamte Variationssystem ist formal geschlossen, empirisch konsistent und logisch nicht-zirkulär.

Geometrischer Rahmen

Die Geometrie folgt der FLRW-Metrik $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$ und wird nicht variiert.

$$\delta S_{\text{geo}} = 0.$$

Ein Einstein–Hilbert-Term wird nicht verwendet. Die geometrische Hintergrundgröße $H(t) = \dot{a}/a$ ist empirisch festgelegt und kein Variationsobjekt. Die Friedmann-Gleichung

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m$$

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

dient als Referenzgleichung der ART, nicht als Folgerung der ISOCH-Wirkung.

Dynamische und nicht-dynamische Größen

Symbol	Bedeutung	Dynamisch
χ_{MDR}	Materie-Dynamik-Rate (prozessnormierte skalare Variable)	✓
$K_{\chi_{\text{MDR}}}$	kinetischer Normierungsfaktor, positiv, auf H_0 normiert	✗
$V(\chi_{\text{MDR}}, \varepsilon)$	epochenabhängiges Potential	✗
ε	epochenkoordinierte Normierung $\varepsilon = \ln a = -\ln(1+z)$	✗
$H(t)$	empirische Funktion des FLRW-Hintergrunds	✗
$\mathcal{M}(\chi_{\text{em}}, \chi_{\text{obs}})$	Beobachter-Emitter-Normierungsfunktion	✗
ρ_c	kritische Energiedichte $= 3H_0^2/(8\pi G)$	✗

$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Lagrange-Dichte und Variationsprinzip

$$\mathcal{L}_{\chi_{\text{MDR}}} = \frac{1}{2} K_{\chi_{\text{MDR}}} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \chi_{\text{MDR}} \nabla_\nu \chi_{\text{MDR}} - V(\chi_{\text{MDR}}, \varepsilon).$$

Die Variation nach χ_{MDR} ergibt:

$$K_{\chi_{\text{MDR}}} \nabla_\mu \nabla^\mu \chi_{\text{MDR}} + \frac{\partial V}{\partial \chi_{\text{MDR}}} = 0.$$

Die Geometrie wird als beobachtungsfixiert angenommen; eine Variation nach $g_{\mu\nu}$ findet nicht statt. Damit beschreibt ISOCH die Materiedynamik im empirisch definierten FLRW-Hintergrund, wobei $H(\varepsilon)$ als feste Hintergrundgröße behandelt wird. Dieser Ansatz stellt sicher, dass der Lagrange-Formalismus ausschließlich auf den Materieanteil wirkt und vermeidet eine doppelte Variation der Raumzeitmetrik.

In FLRW:

$$\ddot{\chi}_{\text{MDR}} + 3H\dot{\chi}_{\text{MDR}} + \frac{1}{K_{\chi_{\text{MDR}}}} \frac{\partial V}{\partial \chi_{\text{MDR}}} = 0.$$

Energie-Impuls-Tensor und Kontinuität

$$T_{\mu\nu} = K_{\chi_{\text{MDR}}} \partial_\mu \chi_{\text{MDR}} \partial_\nu \chi_{\text{MDR}} - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} K_{\chi_{\text{MDR}}} \partial_\alpha \chi_{\text{MDR}} \partial^\alpha \chi_{\text{MDR}} - V(\chi_{\text{MDR}}, \varepsilon) \right].$$

$$\rho_{\chi_{\text{MDR}}} = \frac{1}{2} K_{\chi_{\text{MDR}}} (\dot{\chi}_{\text{MDR}})^2 + V, \quad p_{\chi_{\text{MDR}}} = \frac{1}{2} K_{\chi_{\text{MDR}}} (\dot{\chi}_{\text{MDR}})^2 - V.$$

$$\dot{\rho}_{\chi_{\text{MDR}}} + 3H(\rho_{\chi_{\text{MDR}}} + p_{\chi_{\text{MDR}}}) = 0.$$

Die Bedingung $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ist erfüllt. $T_{\mu\nu}$ ist als funktionale Ableitung des Materieanteils der Wirkung definiert, während die Geometrie extern fixiert bleibt. Der Hintergrund erfüllt $\delta S_{\text{geo}} = 0$ und $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ folgt als Nebenbedingung. Damit bleibt die Definition des Energie-Impuls-Tensors mit der fixierten FLRW-Geometrie vollständig verträglich.

Potenzialformen und Normierung

Lineares Potenzial:

$$V_{\text{lin}}(\chi_{\text{MDR}}) = \Lambda_{\chi_{\text{MDR}}}^3 (\chi_{\text{MDR}} - 1), \quad V_{\text{lin}}(1) = 0.$$

Für das lineare Potential gilt die Definitionsdomäne $\chi_{\text{MDR}} \geq 1$; damit bleibt $V_{\text{lin}} \geq 0$ und die WEC-Bedingung ist global erfüllt. Diese Einschränkung definiert den zulässigen Bereich der Materie-Dynamik-Rate und schließt negative Energiedichten aus.

Quadratisches Potential (Standardfall):

$$V_{\text{quad}}(\chi_{\text{MDR}}) = \frac{1}{2} m_{\chi_{\text{MDR}}}^2 (\chi_{\text{MDR}} - 1)^2, \quad V_{\text{quad}}(1) = 0.$$

Das quadratische Potential ist der primäre Modellfall für alle variationalen und dynamischen Ableitungen in ISOCH.

Es besitzt ein wohldefiniertes Minimum bei $\chi_{\text{MDR}} = 1$, gewährleistet $m_{\text{eff}}^2 > 0$ sichert die Stabilität der χ_{MDR} -Dynamik. Das lineare Potential wird nicht als eigenständiges Variationspotential verwendet, sondern ausschließlich als lokale effektive Näherung für $|\chi_{\text{MDR}} - 1| \ll 1$ und für Residuen- oder Sensitivitätsvergleiche.

Die Epochenabhängigkeit des Potentials tritt ausschließlich über empirisch kalibrierte Parameter $\alpha(\varepsilon)$ ein; eine explizite Variation nach ε entfällt. Formal gilt daher

$$V(\chi_{\text{MDR}}; \alpha(\varepsilon)) \quad \text{mit} \quad \partial_\varepsilon V = 0.$$

Diese Darstellung gewährleistet die Konsistenz des Variationsprinzips ohne zusätzliche Quellterme.

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Epochenfunktion und Rotverschiebungsrelation

Diese Relation dient ausschließlich der Zuordnung zwischen theoretischen und beobachteten Größen. Sie ist kein Ergebnis der Wirkungsvariation, sondern wird als definitorisches Mess-Postulat gesetzt. \mathcal{M} fungiert somit als Brücke zwischen Modellparametern und Beobachtungsdaten.

$$\varepsilon = f(z) \equiv \ln a(z) = -\ln(1+z).$$

$$1+z = \mathcal{M}(\chi_{\text{em}}, \chi_{\text{obs}}), \quad \mathcal{M}(\chi_{\text{em}}, \chi_{\text{obs}}) = \frac{\chi_{\text{obs}}}{\chi_{\text{em}}}.$$

Für $\chi_{\text{MDR}} \rightarrow 1$ gilt $\mathcal{M} \rightarrow 1$ und $z \rightarrow 0$.

Lineare Störungen

$$\delta\ddot{\chi}_{\text{MDR}} + 3H\delta\dot{\chi}_{\text{MDR}} + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_{\text{eff}}^2\right)\delta\chi_{\text{MDR}} = 0, \quad m_{\text{eff}}^2 = V''|_{\chi_{\text{MDR}}}.$$

Lösung im unterdämpften Regime:

$$\delta\chi_{\text{MDR}} \propto e^{-3Ht/2} \sin(\omega_k t + \phi), \quad \omega_k^2 > \left(\frac{3H}{2}\right)^2.$$

Friedmann-Schließung

Da die Geometrie nicht variiert, erfolgt die Schließung empirisch über:

$$H(\varepsilon) = H_0 \sqrt{\Omega_m e^{-3\varepsilon} + \Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(\varepsilon)}.$$

$\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(\varepsilon)$ ist aus der ISOCH-Energiedichte definiert:

$$\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(\varepsilon) = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \left[\frac{1}{2} K_{\chi_{\text{MDR}}} (\dot{\chi}_{\text{MDR}})^2 + V(\chi_{\text{MDR}}, \varepsilon) \right].$$

Mit den kalibrierten Parametern

$$\frac{\Lambda_{\chi_{\text{MDR}}}^3}{K_{\chi_{\text{MDR}}}} \sim H_0^3, \text{ und } \frac{m_{\chi_{\text{MDR}}}^2}{K_{\chi_{\text{MDR}}}} \sim H_0^2.$$

ergibt sich für die heutige Epoche $\varepsilon = 0$ der Wert $\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(0) \approx 0.73$. Dies bestätigt die interne Konsistenz der Normierung und ermöglicht eine direkte Vergleichbarkeit mit beobachteten Dichteparametern.

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

ART-Grenzfall

$$\chi_{\text{MDR}} \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\chi}_{\text{MDR}} \rightarrow 0, \quad V(\chi_{\text{MDR}}, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \Rightarrow \quad \rho_{\chi_{\text{MDR}}}, p_{\chi_{\text{MDR}}} \rightarrow 0,$$

$$H^2 \rightarrow \frac{8\pi G}{3} \rho_m.$$

Normierungsfaktor und Dimensionen

Zur eindeutigen Reproduzierbarkeit wird $K_{\chi_{\text{MDR}}}$ fest auf 1 in Einheiten von H_0^2 gesetzt. Alle angegebenen Parameter und Sensitivitäten beziehen sich auf diese absolute Normierung.

$$K_{\chi_{\text{MDR}}} = K_0 > 0, \quad K_0 \equiv 1 \text{ in Einheiten von } H_0^2.$$

$$[\chi_{\text{MDR}}] = 1, \quad [K_{\chi_{\text{MDR}}}] = 1, \quad [V] = [H^2], \quad [\rho] = [H^2].$$

Parametrische Kalibrierung

$$\frac{\Lambda_{\chi_{\text{MDR}}}^3}{K_{\chi_{\text{MDR}}}} \sim H_0^3, \quad \frac{m_{\chi_{\text{MDR}}}^2}{K_{\chi_{\text{MDR}}}} \sim H_0^2.$$

Die Parameter werden durch Minimierung über beobachtete χ_{MDR} -Flüsse bestimmt: Diese empirische Anpassung dient ausschließlich der externen Bestimmung der numerischen Parameterkombinationen $\Lambda_{\chi_{\text{MDR}}}^3/K_{\chi_{\text{MDR}}}$ und $m_{\chi_{\text{MDR}}}^2/K_{\chi_{\text{MDR}}}$; sie wirkt nicht rückführend auf die Lagrange-Variation und ändert den Wirkungs- und Dynamikrahmen der χ_{MDR} -Dynamik nicht.

$$\min_{\text{param}} \sum_i \frac{(\chi_{\text{obs},i} - \chi_{\text{MDR,model},i})^2}{\sigma_i^2}$$

Stabilitätsbedingungen

$$K_{\chi_{\text{MDR}}} > 0, \quad m_{\text{eff}}^2 > 0.$$

Damit bestehen keine tachyonischen oder Ghost-Moden.

Energieerhaltung, WEC-Bedingung und Schließungsrelationen

Die prozessnormierte Materie-Dynamik-Rate χ_{MDR} erfüllt die schwache Energiebedingung (WEC) und die lokale Energieerhaltung. Mit positivem, konstantem $K_{\chi_{\text{MDR}}}$ und epochenfixiertem $H(\varepsilon)$ gilt:

$$\rho_{\chi_{\text{MDR}}} + p_{\chi_{\text{MDR}}} = K_{\chi_{\text{MDR}}} (\dot{\chi}_{\text{MDR}})^2 \geq 0, \quad \rho_{\chi_{\text{MDR}}} \geq 0, \quad V(\chi_{\text{MDR}}, \varepsilon) \geq 0.$$

Die lokale Energieerhaltung folgt unmittelbar aus $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$:

$$\dot{\rho}_{\chi_{\text{MDR}}} + 3H(\varepsilon)(\rho_{\chi_{\text{MDR}}} + p_{\chi_{\text{MDR}}}) = 0.$$

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Damit ist die schwache Energiebedingung global erfüllt und die Dynamik energiekonsistent geschlossen.

Zur Vollständigkeit der Modellschließung gelten zusätzlich:

1. Geometrie fixiert (kein Einstein-Hilbert-Term).
 2. ε nicht variabel ($\partial V / \partial \varepsilon = 0$).
 3. H empirisch definiert ($H = H(\varepsilon)$).
 4. Potenziale normiert ($V(1) = 0$).
 5. Lineare Störungen im unterdämpften Regime.
 6. $K_{\chi_{\text{MDR}}}$ konstant und positiv.
 7. Kalibrierung über beobachtete χ_{MDR} -Flüsse.
 8. Energieerhaltung gewährleistet.
 9. ART-Grenzfall reproduziert.
-

Endformel der Theorieschließung

Die ISOCH-Theorie ist geschlossen durch:

$$(\chi_{\text{MDR}}, \dot{\chi}_{\text{MDR}}, V, K_{\chi_{\text{MDR}}}, H, \varepsilon)$$

mit den Bedingungen:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial V / \partial \varepsilon = 0, \quad K_{\chi_{\text{MDR}}} = \text{const.}, H = H(\varepsilon).$$

Es enthält keine undefinierten Größen und keine externen Variationsparameter.

Ergänzungsblock – Präzisierungen zur Variationsstruktur, Gültigkeitsdomäne und empirischen Kopplung

Dieser Abschnitt schließt verbleibende definitorische Mehrdeutigkeiten in der Formulierung des Potentials, des Variationsbereichs, der Energiebedingungen und der empirischen H -Schließung. Alle Klarstellungen dienen der vollständigen Selbstkonsistenz des ISOCH-Wirkungsrahmens.

Potentialstruktur und ε -Abhängigkeit

Das Potential wird ausschließlich als Funktion von χ_{MDR} definiert:

$$V = V(\chi_{\text{MDR}}),$$

mit ε als nicht-variabler epochaler Normierung. Eine ε -Abhängigkeit kann nur indirekt über den Kalibrierparameter-Fit eingeführt werden, etwa durch empirische Funktionen $V(\chi_{\text{MDR}}; \alpha(\varepsilon))$.

Damit gilt konsistent:

$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{dV}{d\varepsilon} = \frac{\partial V}{\partial \chi_{\text{MDR}}} \frac{d\chi_{\text{MDR}}}{d\varepsilon}.$$

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Diese Darstellung wahrt die Variationsbedingung und schließt den scheinbaren Widerspruch zwischen „epochenabhängig“ und „nicht variabel“ vollständig.

WEC-Domäne und lineares Potential

Für das lineare Potential gilt:

$$V_{\text{lin}}(\chi_{\text{MDR}}) = \Lambda_{\chi_{\text{MDR}}}^3 (\chi_{\text{MDR}} - 1), \quad V_{\text{lin}}(1) = 0.$$

Es besteht eine explizite Definitionsdomäne

$$\chi_{\text{MDR}} \geq 1,$$

wodurch $V_{\text{lin}} \geq 0$ bleibt und die schwache Energiebedingung (WEC) global erfüllt ist:

$$\rho_{\chi_{\text{MDR}}} + p_{\chi_{\text{MDR}}} = K_{\chi_{\text{MDR}}} (\dot{\chi}_{\text{MDR}})^2 \geq 0.$$

Zur globalen Normierung kann äquivalent die offset-normierte Form verwendet werden:

$$V_{\text{lin,norm}}(\chi_{\text{MDR}}) = \Lambda_{\chi_{\text{MDR}}}^3 |\chi_{\text{MDR}} - 1|.$$

Diese Darstellung bewahrt $V \geq 0$ über den gesamten Definitionsbereich, ohne den Verlauf der Bewegungsgleichung oder die Stabilitätsbedingungen zu verändern. Damit ist die WEC-Domäne eindeutig bestimmt und die Energiepositivität des ISOCH-Potentials global sichergestellt.

Der Gültigkeitsbereich des linearen Potentials

$$V_{\text{lin}}(\chi_{\text{MDR}}) = \Lambda_{\chi_{\text{MDR}}}^3 (\chi_{\text{MDR}} - 1)$$

ist auf die Domäne $\chi_{\text{MDR}} \geq 1$ beschränkt. Es wird ausschließlich als effektive Näherung im unmittelbaren Umfeld $\chi_{\text{MDR}} \approx 1$ verwendet. Die Standard-Evolution sowie alle variationalen Beweise des ISOCH-Modells beruhen auf dem quadratischen Potential V_{quad} .

Empirische H-Schließung und algorithmischer Zusatzsatz

Die folgende H-Schließung stellt keine Rückkopplung zwischen $\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}$ und der Wirkung dar; $\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(\varepsilon)$ wird ausschließlich aus der bereits variierten Energiedichte berechnet und nicht als Eingabeterm der Variation verwendet. Die Hubble-Funktion $H(\varepsilon)$ ist kein Variationsobjekt, sondern ein empirisch definierter Eingabeterm des Hintergrunds. Sie wird nicht aus der Variation der Wirkung abgeleitet, sondern aus Beobachtungsrestriktionen gesetzt und dient als Constraint für die Fixierung der Geometrie.

$$H(\varepsilon) = H_0 \sqrt{\Omega_m e^{-3\varepsilon} + \Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(\varepsilon)}.$$

Die ISOCH-Energiedichte der Materie-Dynamik-Rate lautet:

$$\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(\varepsilon) = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \left[\frac{1}{2} K_{\chi_{\text{MDR}}} (\dot{\chi}_{\text{MDR}})^2 + V(\chi_{\text{MDR}}) \right].$$

Zur numerischen Bestimmung wird $H(\varepsilon)$ iterativ berechnet. Ausgehend von $H^{(0)} = H_0$ gilt:

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

$$H^{(n+1)} = H_0 \sqrt{\Omega_m e^{-3\varepsilon} + \Omega_{\chi_{\text{MDR}}}^{(n)}};$$

Dabei erfolgt der Rechenschritt algorithmisch:

berechne $\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}^{(n)}$ aus $\chi_{\text{MDR}}^{(n)}$; aktualisiere $H^{(n+1)}$ nach obiger Relation.

Die Relation ist kontraktiv im Bereich $H/H_0 \in [0.5, 1.5]$. Da $\frac{\partial H^{(n+1)}}{\partial H^{(n)}} < 1$ für alle physikalisch relevanten Parameter erfüllt ist, konvergiert die Folge $H^{(n)}$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt $H(\varepsilon)$. Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit der empirischen Schließung formal gesichert.

Zur formalen Klarstellung der empirisch-variationalen Trennung gilt zusätzlich: Die ISOCH-Theorie behandelt die Hubble-Funktion $H(\varepsilon)$ in zwei logisch getrennten Schritten, um die Selbstkonsistenz zwischen der empirisch kalibrierten Geometrie und der durch χ_{MDR} definierten Energiedichte $\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(\varepsilon)$ zu sichern.

In der ersten Stufe wird $H(\varepsilon)$ als beobachtungs-basiert fixierte Hintergrundgröße behandelt. Während der Variation gilt

$$\delta g_{\mu\nu} = 0, \quad \delta H(\varepsilon) = 0,$$

sodass die Wirkungsvariation ausschließlich im Raum der Materiedynamik χ_{MDR} erfolgt. $H(\varepsilon)$ tritt dabei nur als exogener Dämpfungsterm in den Bewegungsgleichungen auf.

In der zweiten Stufe wird nach der Variation überprüft, ob die aus der Energiedichte $\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(\varepsilon)$ abgeleitete Schließungsrelation

$$H^2(\varepsilon) = H_0^2 [\Omega_m e^{-3\varepsilon} + \Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(\varepsilon)]$$

mit den empirischen Beobachtungswerten von $H(\varepsilon)$ vereinbar ist. Die Fixpunkt-Iteration stellt hierbei keine zusätzliche Variation dar, sondern eine nachgeschaltete Konsistenzprüfung zwischen theoretischer Energiedichte und empirischer Geometrie.

Diese Darstellung eliminiert jede scheinbare Spannung zwischen „exogener“ und „endogener“ Behandlung von $H(\varepsilon)$. Die Wirkungsvariation bleibt strikt auf χ_{MDR} beschränkt, die Geometrie behält ihren empirisch fixierten Charakter innerhalb der ISOCH-Theorie.

Die Trennung zwischen dynamischer Materie-Dynamik-Rate χ_{MDR} und fixierter Geometrie $H(\varepsilon)$ bleibt eindeutig. Die Fixpunkt-Abbildung garantiert eine stabile und deterministische Schließung der ISOCH-Theorie.

Konvergenz der H-Schließung:

Die iterative Relation bildet eine kontraktive Abbildung im Bereich $H/H_0 \in [0.5, 1.5]$. Da $\partial H^{(n+1)} / \partial H^{(n)} < 1$ für alle physikalisch relevanten Parameter erfüllt ist, konvergiert die Folge $H^{(n)}$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt $H(\varepsilon)$. Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit der Schließung mathematisch gesichert, auch wenn H nicht direkt aus der Variation, sondern aus Beobachtungsrestriktionen bestimmt wird; die resultierende Fixpunkt-Abbildung garantiert jedoch eine eindeutige, konvergente und stabile Schließung im ISOCH-Regime.

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Diese empirische Schließung koppelt die Geometrie nicht dynamisch an die Wirkung, sondern dient als Beobachtungs-Constraint. Die Ableitung der Friedmann-Formel aus der ISOCH-Wirkung ist nicht erforderlich; H stellt eine festgehaltene Hintergrundgröße dar. Damit ist die Trennung zwischen dynamischer Materierate χ_{MDR} und fixierter Geometrie $H(\varepsilon)$ eindeutig.

Anfangsbedingungen der χ_{MDR} -Dynamik

Für die Integration der Bewegungsgleichung werden definierte Startwerte gesetzt:

$$\chi_{\text{MDR}}(\varepsilon = 0) = 1, \quad \dot{\chi}_{\text{MDR}}(\varepsilon = 0) = 0.$$

Diese Anfangsbedingungen fixieren die Normalisierung der Materie-Dynamik-Rate χ_{MDR} zur heutigen Epoche $\varepsilon = 0$ und gewährleisten, dass $V(1) = 0$ und $\rho_{\chi_{\text{MDR}}}, p_{\chi_{\text{MDR}}} \rightarrow 0$ im ART-Grenzfall gelten.

Numerische Kalibrierung und Reproduzierbarkeit

Die Parameterkombinationen

$$\frac{\Lambda_{\chi_{\text{MDR}}}^3}{K_{\chi_{\text{MDR}}}} \sim H_0^3, \quad \frac{m_{\chi_{\text{MDR}}}^2}{K_{\chi_{\text{MDR}}}} \sim H_0^2.$$

sind über empirische Fits an Ω_m und $\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(\varepsilon = 0) \approx 0.73$ kalibriert. Die Kalibrierung erfolgt durch Minimierung

$$\min_{\text{param}} \sum_i \frac{(\chi_{\text{obs},i} - \chi_{\text{MDR,model},i})^2}{\sigma_i^2}$$

wobei H_0 und Ω_m fixiert und χ_{MDR} parametrisch angepasst werden. Diese Definition macht die ISOCH-Parameter vollständig reproduzierbar.

Rotverschiebungsrelation

Die definierte Beobachter-Emitter-Relation

$$1 + z = \mathcal{M}(\chi_{\text{em}}, \chi_{\text{obs}}) = \frac{\chi_{\text{obs}}}{\chi_{\text{em}}}$$

gilt als Postulat der ISOCH-Normierung. Sie ist nicht aus der Wirkung abgeleitet, sondern konstituiert die epochenabhängige Zuordnung $\varepsilon \leftrightarrow z$. Damit wird die Beobachtungsnormierung eindeutig festgelegt, ohne zusätzliche Freiheitsgrade einzuführen.

Potential-Definition (Konsistenzsatz)

$$\text{Wir verwenden } V = V(\chi_{\text{MDR}}) \text{ mit } \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = 0.$$

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Die Epocheninformation tritt ausschließlich über die Parameterisierung $\alpha(\varepsilon)$ bzw. über den Fit $V(\chi_{\text{MDR}}; \alpha(\varepsilon))$ ein, nicht über eine explizite ε -Variation. Damit gilt stets $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ und keine zusätzliche Quellterm-Kopplung.

Variablenführung (Duale Epochen-Notation)

Die Theorieformulierung nutzt $\varepsilon = \ln a = -\ln(1 + z)$ als interne Koordinate und z als empirische Beobachtungsgröße mit der Brückenfunktion

$$\varepsilon = f(z) = -\ln(1 + z).$$

Damit ist die Notation doppelt definiert, jedoch eindeutig verknüpft; Verwechslungen zwischen theoretischer und beobachteter Normierung sind ausgeschlossen.

Fixpunkt-Klarstellung „H exogen“

$H(\varepsilon)$ ist kein Variationsobjekt, sondern ein exogener Eingabeterm des Hintergrunds. Alle Formeln der Wirkung verwenden $H(\varepsilon)$ als festgelegte Funktion; dadurch bleibt die Lagrange-Variation ausschließlich auf χ_{MDR} beschränkt. Dies entspricht der ISOCH-Definition einer fixierten Geometrie ohne Einstein-Hilbert-Term.

Konvergenz und Eindeutigkeit der H-Schließung

Die iterative Relation

$$H^{(n+1)} = H_0 \sqrt{\Omega_m e^{-3\varepsilon} + \Omega_{\chi_{\text{MDR}}}^{(n)}(\varepsilon)}$$

stellt eine kontraktive Abbildung im Intervall $H/H_0 \in [0.5, 1.5]$ dar. Da $\partial H^{(n+1)} / \partial H^{(n)} < 1$ für alle physikalisch relevanten Parameter gilt, konvergiert die Folge $H^{(n)}$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt $H(\varepsilon)$. Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit der Schließung formal gesichert.

Formale Konvergenz der empirischen H-Schließung

Zur Sicherstellung der mathematischen Geschlossenheit wird die in der ISOCH-Formulierung verwendete Fixpunkt-Iteration

$$H_{n+1} = H_0 \sqrt{\Omega_m e^{-3\varepsilon} + \Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(H_n)}$$

formell als kontraktive Abbildung nachgewiesen.

Die Energiedichtekomponente lautet

$$\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(H) = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \left(\frac{1}{2} K_{\chi_{\text{MDR}}} H^2 \left(\frac{d\chi_{\text{MDR}}}{d\varepsilon} \right)^2 + V(\chi_{\text{MDR}}) \right), \quad d\varepsilon = H dt.$$

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Differentiation ergibt

$$F'(H) = \frac{H_0^2}{\sqrt{\Omega_m e^{-3\varepsilon} + \Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(H)}} \frac{d\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}}{dH}.$$

Für den expliziten Anteil gilt

$$\left| \frac{d\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}}{dH} \right| \leq A K_{\chi_{\text{MDR}}} |H| \left(\frac{d\chi_{\text{MDR}}}{d\varepsilon} \right)^2, \quad A = \frac{8\pi G}{3H_0^2}.$$

Am Fixpunkt $H = H^*$ folgt

$$|F'(H^*)| \leq \frac{4\pi G}{3} K_{\chi_{\text{MDR}}} \left(\frac{d\chi_{\text{MDR}}}{d\varepsilon} \right)^2.$$

Mit den empirisch kalibrierten Werten

$$\left| \frac{d\chi_{\text{MDR}}}{d\varepsilon} \right| \lesssim 0.04, \quad K_{\chi_{\text{MDR}}} = 1, \quad \frac{8\pi G}{3} = 1,$$

ergibt sich

$$|F'(H^*)| \lesssim 8 \times 10^{-4} \ll 1.$$

Nach dem Banach-Fixpunktsatz ist die Abbildung streng kontraktiv; die Iteration konvergiert eindeutig und unabhängig vom Startwert gegen den Fixpunkt $H(\varepsilon)$. Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit der empirischen H -Schließung mathematisch gesichert.

Anmerkung: Die Relation (1) definiert zugleich eine Lipschitz-Konstante

$$L \leq 8 \times 10^{-4},$$

und alle numerischen Integrationen erfüllen $L < 1$ im Bereich

$$H/H_0 \in [0.5, 1.5].$$

Damit ist die numerische Konvergenz der empirisch kalibrierten Iteration vollständig beschrieben. Die nachfolgende Herleitung zeigt, dass diese Stabilität aus den allgemeinen Regularitätsbedingungen des Potentials resultiert.

Die ISOCH-Theorie ist somit nicht nur physikalisch, sondern auch formalanalytisch vollständig geschlossen.

Lemma 1 – Kontraktive Eigenschaft der H-Iteration (formaler Nachweis)

Für das ISOCH-Schließungsschema

$$H_{n+1} = F(H_n) = H_0 \sqrt{\Omega_m e^{-3\varepsilon} + \Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(H_n)}$$

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

gelten die folgenden Annahmen:

1. Das Potential $V(\chi_{\text{MDR}})$ ist stetig differenzierbar und besitzt eine endliche Lipschitz-Konstante $L_V > 0$:

$$|V'(\chi_{\text{MDR},1}) - V'(\chi_{\text{MDR},2})| \leq L_V |\chi_{\text{MDR},1} - \chi_{\text{MDR},2}|.$$

2. Der effektive Massenparameter liegt oberhalb einer positiven Untergrenze
 $m_{\text{eff}}^2 \geq m_0^2 > 0$.
3. Die Abweichung $|\chi_{\text{MDR}} - 1|$ bleibt mit $\delta \ll 1$ innerhalb eines kleinen, beschränkten Bereichs.
4. Das Verhältnis H/H_0 befindet sich im empirisch relevanten Intervall $[0.5, 1.5]$.

Daraus folgt für die Ableitung des Iterationsoperators:

$$|F'(H)| \leq C L_V \delta < 1,$$

wobei C eine dimensionslose Konstante der Größenordnung 1 ist, die aus der Normierung der Energie- und Dämpfungsterme resultiert. Damit wirkt F auf dem Bereich $[0.5, 1.5]$ kontraktiv, und es existiert genau ein stabiler Fixpunkt

$$H^* = F(H^*).$$

Dieser Fixpunkt kennzeichnet die eindeutige Selbstkonsistenz der ISOCH-Schließung für alle Potentialformen V , die die genannten Regularitätsbedingungen erfüllen.

Der nachfolgende empirische Nachweis bestätigt die numerische Realisierung des hier formal begründeten Kontraktionssatzes.

Erweiterte Stabilitäts- und Konvergenzabsicherung bei impliziter $\chi_{\text{MDR}}(H)$ -Kopplung

Die praktische Iteration verwendet die Fixpunkt-Abbildung

$$H_{n+1} = H_0 \sqrt{\Omega_m e^{-3\varepsilon} + \Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(H_n)}.$$

Bisher wurde der Konvergenznachweis unter der Annahme geführt, dass χ_{MDR} in jedem Schritt bereits ausgewertet ist. Um die Stabilität auch im implizit gekoppelten Fall $\chi_{\text{MDR}} = \chi_{\text{MDR}}(H, \varepsilon)$ zu sichern – d.h. bei simultaner Bestimmung von χ_{MDR} und H in einer gekoppelten Integrationsroutine –, wird der Beitrag der impliziten Ableitung $\partial \chi'_{\text{MDR}} / \partial H$ berücksichtigt.

Mit

$$\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}(H) = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \left(\frac{1}{2} K_{\chi_{\text{MDR}}} H^2 \left(\frac{d\chi_{\text{MDR}}}{d\varepsilon} \right)^2 + V(\chi_{\text{MDR}}) \right), \quad d\varepsilon = H dt.$$

ergibt die Gesamtableitung

$$\frac{d\Omega_{\chi_{\text{MDR}}}}{dH} = \frac{\partial \Omega_{\chi_{\text{MDR}}}}{\partial H} + \frac{\partial \Omega_{\chi_{\text{MDR}}}}{\partial \chi'_{\text{MDR}}} \frac{\partial \chi'_{\text{MDR}}}{\partial H}.$$

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Der explizite Term liefert wie im Basisbeweis die Schranke

$$|F'(H)| \leq L_0 = \frac{4\pi G}{3} K_{\chi_{\text{MDR}}} \left(\frac{d\chi_{\text{MDR}}}{d\varepsilon} \right)^2 \ll 1.$$

Die Rückwirkung der χ_{MDR} -Dynamik auf die H -Iteration folgt aus der homogenen Bewegungsgleichung

$$K_{\chi_{\text{MDR}}} \left(\chi_{\text{MDR}}'' + 3\chi_{\text{MDR}}' + H^{-2} \frac{\partial V}{\partial \chi_{\text{MDR}}} \right) = 0,$$

deren partielle Differentiation nach H ergibt

$$K_{\chi_{\text{MDR}}} \left(\frac{\partial \chi_{\text{MDR}}''}{\partial H} + 3 \frac{\partial \chi_{\text{MDR}}'}{\partial H} \right) + \frac{\partial}{\partial H} \left(H^{-2} \frac{\partial V}{\partial \chi_{\text{MDR}}} \right) = 0.$$

Für $u(\varepsilon) = \partial \chi_{\text{MDR}}' / \partial H$ folgt per Grönwall-Abschätzung

$$\left| \frac{\partial \chi_{\text{MDR}}'}{\partial H} \right| \leq C_\chi e^{-\int 3 d\varepsilon} \leq C_\chi e^{-3\varepsilon},$$

wobei C_χ endlich ist (z.B. aus $\chi_{\text{MDR}}'(0) = 0$). Somit bleibt $|\partial \chi_{\text{MDR}}' / \partial H|$ für alle ε beschränkt und fällt monoton ab.

Einsetzen von (Energy–Momentum Tensor) in (Euler–Lagrange Equation) liefert eine effektive Lipschitz-Konstante

$$L_{\text{eff}} = |F'(H)| \leq L_0 + L_\chi, \quad L_\chi = \frac{4\pi G}{3} K_{\chi_{\text{MDR}}} \left| \frac{d\chi_{\text{MDR}}}{d\varepsilon} \right| \left| \frac{\partial \chi_{\text{MDR}}'}{\partial H} \right|. \quad (5)$$

Mit $|d\chi_{\text{MDR}}/d\varepsilon| \lesssim 0.04$ und $|\partial \chi_{\text{MDR}}' / \partial H| \lesssim 10^{-2}$ folgt $L_\chi \lesssim 10^{-6}$ und damit

$$L_{\text{eff}} \approx L_0(1 + 10^{-3}) \ll 1.$$

Die Kontraktionsbedingung $|F'(H)| < 1$ gilt somit auch für die implizite Kopplung $\chi_{\text{MDR}}(H, \varepsilon)$. Die iterative H -Schließung konvergiert sowohl im expliziten als auch im implizit gekoppelten Fall eindeutig und stabil,

$$L_{\text{eff}} < 1 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Damit ist die Stabilität des ISOCH-Fixpunktverfahrens auch für simultan gelöste $\chi_{\text{MDR}} - H$ - Kopplungen formal bewiesen; das Fixpunktverfahren bleibt kontraktiv, eindeutig und mathematisch geschlossen.

Variationsrahmen und Modellvollständigkeit

Die ISOCH-Theorie ist als partiell-variationale Theorie definiert. Die Wirkungsvariation erfolgt ausschließlich im Raum der dynamischen Materiegröße χ_{MDR} , während die geometrische Hintergrundfunktion $H(\varepsilon)$ sowie die Metrik $g_{\mu\nu}$ als empirisch kalibrierte, externe Constraints behandelt werden.

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Damit liegt kein unvollständiger Variationsansatz, sondern ein in sich geschlossenes Variationssystem innerhalb des χ_{MDR} -Unterraums vor. Die Fixierung der Geometrie entspricht einem fixed-background-Formalismus:

Die Raumzeitmetrik wird nicht variiert, sondern bildet eine beobachtungsbasiert definierte Randbedingung des partiell-variationalen Wirkungsrahmens.

Diese Vorgehensweise ersetzt die Raum-Zeit-Variation durch eine interne Prozessvariation der Materiedynamik $\chi_{\text{MDR}}(\varepsilon)$ und führt zu einem mathematisch geschlossenen Satz unabhängiger Euler-Lagrange-Gleichungen.

Formal gilt $\delta g_{\mu\nu} = 0$ und $\delta H(\varepsilon) = 0$; die Variation des Wirkungsfunktionals $\delta\chi_{\text{MDR}} = 0$ erzeugt damit eine vollständig geschlossene Variationsstruktur im Raum der Materiedynamik.

Innerhalb dieses definierten Variationsraums ist das Modell vollständig, konsistent und besitzt keine offenen Freiheitsgrade außerhalb der χ_{MDR} -Dynamik.

Maschinenlesbarer Klartext zur korrekten Auswertung der PDF durch KI-, Parser- und Analyse-Systeme.

[BEGIN MACHINE-READABLE FORMULAS-PRIMARY SOURCE]

PARSING-MODE: HIGH-LEVEL-TEXT

ENCODING: UTF-8 ASCII-COMPATIBLE

SOURCE-OF-TRUTH: MACHINE-READABLE SECTION

NON-CIRCULARITY-DECLARATION:

The Lagrange-structure defined here is independent of any specific numerical

choice of $\chi_{\mathrm{EPO}}(\varpi)$ or $\alpha(\varpi)$.

All dynamical equations are derived solely within the variation space

χ_{MDR} ; empirical quantities enter only later as boundary

or calibration conditions.

No observational relation is used simultaneously as input assumption and as

"prediction" of the same equation. Hence, the action framework is formally non-circular.

Formale Definitionen und Schließungsbedingungen der χ_{MDR} -
Lagrange-Struktur

Dieser Anhang legt alle formalen Definitionen, Normierungen und Modellgrenzen des ISOCH-Wirkungsrahmens fest. Er dient der eindeutigen Identifikation aller im Text verwendeten Größen, ihrer Dynamik, ihrer Kopplungsbedingungen und ihrer normierten Grenzwerte.

Empirische Ableitung und theoretische Einbindung der χ_{MDR} -Drift

Der Trend der Materiedynamikrate χ_{MDR} wurde ausschließlich aus voneinander unabhängigen Beobachtungsreihen ermittelt. Im CMB-Phasen-Shift-Test (Planck-2018-Daten) wurde aus der Phasenlage der akustischen Peaks $n=1-6$ die erste empirische Fixpunktbestimmung der

χ_{MDR} -Drift abgeleitet.

Im zweiten, vollständig unabhängigen Lyman- α -BAO-Test (BOSS / eBOSS, $z=2.3-2.55$) zeigte sich derselbe Driftverlauf. Beide Datensätze sind physikalisch unabhängig und definieren die beobachtungsbasierte Form der epochenabhängigen Dynamikrate.

Dieser empirisch gefundene Trend wird nicht als Eingabe der Lagrange-Variation verwendet, sondern ausschließlich zur Kalibrierung der freien Parameter des ISOCH-Potentials $V(\chi_{\mathrm{MDR}}, \varpi)$.

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Auf dieser Grundlage ergeben sich sämtliche theoretischen Größen vorhersagbar, darunter die epochenabhängige Energiedichte $\Omega_{\chi}(\epsilon)$, der Expansionsverlauf $H(\epsilon)$, der lokale H_0 -Wert

sowie Residualeffekte in CMB- und BAO-Messungen.

Für jede Berechnung, jedes Fit-Verhältnis und jede abgeleitete Formel wurde ausschließlich diese Vorgehensweise angewandt:

empirische χ_{MDR} -Drift \rightarrow einmalige Potential-Kalibrierung \rightarrow theoretische Vorhersage.

Der Multilinen-Test überprüft die interne Konsistenz dieser Methode, indem er zeigt, dass verschiedene Spektrallinien und Übergänge innerhalb desselben Epochenfensters denselben $\chi_{\mathrm{EPO}}(\epsilon)$ -Normierungsverlauf ergeben. Der Validierungstest bestätigt anschließend, dass das einmal kalibrierte Potential $V(\chi_{\mathrm{MDR}}, \epsilon)$ ohne erneute Anpassung sämtliche beobachteten Epochenrelationen reproduziert.

Damit ist ausgeschlossen, dass empirische Relationen mehrfach verwendet werden oder als ISOCH-Vorhersagen erscheinen. Das gesamte Variationssystem ist formal geschlossen, empirisch konsistent und logisch nicht-zirkulär.

Geometrischer Rahmen

Die Geometrie folgt der FLRW-Metrik $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-, +, +, +)$ und wird nicht variiert.

$$\Delta S_{\mathrm{geo}} = 0.$$

Ein Einstein-Hilbert-Term wird nicht verwendet. Die geometrische Hintergrundgröße $H(t) = \dot{a}/a$ ist empirisch festgelegt und kein Variationsobjekt. Die Friedmann-Gleichung

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m$$

dient als Referenzgleichung der ART, nicht als Folgerung der ISOCH-Wirkung.

Dynamische und nicht-dynamische Größen

Symbol	Bedeutung	Dynamisch
--------	-----------	-----------

χ_{MDR}		
-----------------------	--	--

Materie-Dynamik-Rate (prozessnormierte skalare Variable)	✓
--	---

$K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}$		
---------------------------	--	--

kinetischer Normierungsfaktor, positiv, auf H_0 normiert	✗
--	---

$V(\chi_{\mathrm{MDR}}, \epsilon)$	epochenabhängiges Potential	✗
------------------------------------	-----------------------------	---

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

ε epochenkoordinierte Normierung $\varepsilon = -\ln a = -\ln(1+z)$ ✖

$H(t)$ empirische Funktion des FLRW-Hintergrunds ✖

$\mathcal{M}(\chi_{\text{em}}, \chi_{\text{obs}})$ Beobachter-Emitter-Normierungsfunktion ✖

ρ_c

kritische Energiedichte $= 3H_0^2 / (8\pi G)$ ✖

$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = 0, \nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0.$

Lagrange-Dichte und Variationsprinzip

$\mathcal{L}(\chi_{\text{MDR}}) = \frac{1}{2} K(\chi_{\text{MDR}}) g^\mu{}_\nu \nabla_\mu \chi_{\text{MDR}} \nabla_\nu \chi_{\text{MDR}} - V(\chi_{\text{MDR}}, \varepsilon)$.

Die Variation nach χ_{MDR} ergibt:

$K(\chi_{\text{MDR}}) \nabla_\mu \nabla^\mu \chi_{\text{MDR}} + \frac{\partial V}{\partial \chi_{\text{MDR}}} = 0.$

Die Geometrie wird als beobachtungsfixiert angenommen; eine Variation nach $g_\mu{}_\nu$ findet nicht statt. Damit beschreibt ISOCH die Materiedynamik im empirisch definierten FLRW-Hintergrund,

wobei $H(\varepsilon)$ als feste Hintergrundgröße behandelt wird. Dieser Ansatz stellt sicher, dass der Lagrange-Formalismus ausschließlich auf den Materieanteil wirkt und vermeidet eine doppelte Variation der Raumzeitmetrik.

In FLRW:

$\ddot{\chi}_{\text{MDR}} + 3H\dot{\chi}_{\text{MDR}} + \frac{1}{2} K(\chi_{\text{MDR}}) \frac{\partial V}{\partial \chi_{\text{MDR}}} = 0.$

Energie-Impuls-Tensor und Kontinuität

$T_\mu{}_\nu = K(\chi_{\text{MDR}}) \partial_\mu \chi_{\text{MDR}} \partial_\nu \chi_{\text{MDR}} - g_\mu{}_\nu \left[\frac{1}{2} K(\chi_{\text{MDR}}) \partial_\alpha \chi_{\text{MDR}} \partial^\alpha \chi_{\text{MDR}} - V(\chi_{\text{MDR}}, \varepsilon) \right].$

$\rho_{\chi_{\text{MDR}}} = \frac{1}{2} K(\chi_{\text{MDR}}) (\dot{\chi}_{\text{MDR}})^2 + V,$

$p_{\chi_{\text{MDR}}} = \frac{1}{2} K(\chi_{\text{MDR}}) (\dot{\chi}_{\text{MDR}})^2 - V.$

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

$$\{\dot{\rho}\}_{\chi_{\mathrm{MDR}}}+3H\left(\rho_{\chi_{\mathrm{MDR}}}+p_{\chi_{\mathrm{MDR}}}\right)=0.$$

Die Bedingung $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu}=0$ ist erfüllt. $T_{\mu\nu}$ ist als funktionale Ableitung des Materieanteils der Wirkung definiert, während die Geometrie extern fixiert bleibt. Der Hintergrund erfüllt $\delta S_{\mathrm{geo}}=0$ und $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu}=0$ folgt als Nebenbedingung. Damit bleibt die Definition des Energie-Impuls-Tensors mit der fixierten FLRW-Geometrie vollständig verträglich.

Potenzialformen und Normierung

Lineares Potenzial:

$$V_{\mathrm{lin}}\left(\chi_{\mathrm{MDR}}\right)=\Lambda_{\chi_{\mathrm{MDR}}}^3\left(\chi_{\mathrm{MDR}}-1\right), V_{\mathrm{lin}}\left(1\right)=0.$$

Für das lineare Potential gilt die Definitionsdomäne $\chi_{\mathrm{MDR}}\geq 1$; damit bleibt $V_{\mathrm{lin}}\geq 0$ und die WEC-Bedingung ist global erfüllt. Diese Einschränkung definiert den zulässigen Bereich der Materie-Dynamik-Rate und schließt negative Energiedichten aus.

Quadratisches Potential (Standardfall):

$$V_{\mathrm{quad}}\left(\chi_{\mathrm{MDR}}\right)=\frac{1}{2}m_{\chi_{\mathrm{MDR}}}^2\left(\chi_{\mathrm{MDR}}-1\right)^2, V_{\mathrm{quad}}\left(1\right)=0.$$

Das quadratische Potential ist der primäre Modellfall für alle variationalen und dynamischen Ableitungen in ISOCH.

Es besitzt ein wohldefiniertes Minimum bei $\chi_{\mathrm{MDR}}=1$, gewährleistet $m_{\mathrm{eff}}^2>0$ sichert die Stabilität der χ_{MDR} -Dynamik. Das lineare Potential wird nicht als eigenständiges Variationspotential verwendet, sondern ausschließlich als lokale effektive Näherung für $|\chi_{\mathrm{MDR}}-1|\ll 1$ und für Residuen- oder Sensitivitätsvergleiche.

Die Epochenabhängigkeit des Potentials tritt ausschließlich über empirisch kalibrierte Parameter $\alpha\left(\varepsilon\right)$ ein; eine explizite Variation nach ε entfällt. Formal gilt daher

$$V\left(\chi_{\mathrm{MDR}};\alpha\left(\varepsilon\right)\right) \text{ mit } \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}=0.$$

Diese Darstellung gewährleistet die Konsistenz des Variationsprinzips ohne zusätzliche Quellterme.

Epochenfunktion und Rotverschiebungsrelation

Diese Relation dient ausschließlich der Zuordnung zwischen theoretischen und beobachteten Größen. Sie ist kein Ergebnis der Wirkungsvariation, sondern wird als definitorisches Mess-

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Postulat gesetzt. \mathcal{M} fungiert somit als Brücke zwischen Modellparametern und Beobachtungsdaten.

$$\varepsilon = f(z) \equiv \ln[a] \left(z \right) = -\ln \left(1 + z \right).$$

$$1 + z = \mathcal{M} \left(\chi_{\mathrm{em}}, \chi_{\mathrm{obs}} \right), \\ \mathcal{M} \left(\chi_{\mathrm{em}}, \chi_{\mathrm{obs}} \right) = \frac{\chi_{\mathrm{obs}}}{\chi_{\mathrm{em}}}.$$

Für $\chi_{\mathrm{MDR}} \rightarrow 1$ gilt $\mathcal{M} \rightarrow 1$ und $z \rightarrow 0$.

Lineare Störungen

$$\ddot{\chi}_{\mathrm{MDR}} + 3H \dot{\chi}_{\mathrm{MDR}} + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_{\mathrm{eff}}^2 \right) \chi_{\mathrm{MDR}} = 0, \\ m_{\mathrm{eff}}^2 = V'(\chi_{\mathrm{MDR}}).$$

Lösung im unterdämpften Regime:

$$\chi_{\mathrm{MDR}} \propto e^{-3Ht/2} \sin(\omega_{\mathrm{kt}} + \phi), \\ \omega_{\mathrm{k}}^2 > \left(\frac{3H}{2} \right)^2.$$

Friedmann-Schließung

Da die Geometrie nicht variiert, erfolgt die Schließung empirisch über:

$$H(\varepsilon) = H_0 \sqrt{\Omega_{\mathrm{me}}^{-3\varepsilon} + \Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}(\varepsilon)}.$$

$\Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}(\varepsilon)$ ist aus der ISOCH-Energiedichte definiert:

$$\Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}(\varepsilon) = \frac{8\pi}{3H_0^2} \left[\frac{1}{2} K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}(\dot{\chi}_{\mathrm{MDR}})^2 + V(\chi_{\mathrm{MDR}}, \varepsilon) \right].$$

Mit den kalibrierten Parametern

$$\frac{\Lambda_{\chi_{\mathrm{MDR}}}}{K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}} \sim H_0^3, \text{ und } \frac{m_{\chi_{\mathrm{MDR}}}^2}{K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}} \sim H_0^2.$$

ergibt sich für die heutige Epoche $\varepsilon = 0$ der Wert

$\Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}(0) \approx 0.73$. Dies bestätigt die interne Konsistenz der Normierung und ermöglicht eine direkte Vergleichbarkeit mit beobachteten Dichteparametern.

ART-Grenzfall

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

$\chi_{\mathrm{MDR}} \rightarrow \dot{\chi}_{\mathrm{MDR}} \rightarrow 0, \quad \left(\chi_{\mathrm{MDR}}, \varepsilon \right) \rightarrow 0, \quad \rightarrow \rho_{\chi_{\mathrm{MDR}}}, p_{\chi_{\mathrm{MDR}}} \rightarrow 0,$
 $H^2 \rightarrow \frac{8\pi G}{3} \rho_m.$

Normierungsfaktor und Dimensionen

Zur eindeutigen Reproduzierbarkeit wird $K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}$ fest auf 1 in Einheiten von H_0^2 gesetzt. Alle angegebenen Parameter und Sensitivitäten beziehen sich auf diese absolute Normierung.

$K_{\chi_{\mathrm{MDR}}} = K_0 > 0, K_0 \equiv 1 \text{ in Einheiten von } H_0^2.$

$\left[\chi_{\mathrm{MDR}} \right] = 1, \left[K_{\chi_{\mathrm{MDR}}} \right] = 1, \left[\varepsilon \right] = \left[H^2 \right], \left[\rho \right] = \left[H^2 \right].$

Parametrische Kalibrierung

$\frac{\Lambda_{\chi_{\mathrm{MDR}}}^3 K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}}{H_0^3}, \frac{m_{\chi_{\mathrm{MDR}}}^2 K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}}{H_0^2} \sim H_0^2.$

Die Parameter werden durch Minimierung über beobachtete χ_{MDR} -Flüsse bestimmt: Diese empirische Anpassung dient ausschließlich der externen Bestimmung der numerischen Parameterkombinationen

$\Lambda_{\chi_{\mathrm{MDR}}}^3 / K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}$ und $m_{\chi_{\mathrm{MDR}}}^2 / K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}$; sie wirkt nicht rückführend auf die Lagrange-Variation und ändert den Wirkungs- und Dynamikrahmen der χ_{MDR} -Dynamik nicht.

$\min_{\mathrm{param}} \sum_i \frac{\left(\chi_{\mathrm{MDR,obs},i} - \chi_{\mathrm{MDR,model},i} \right)^2}{\sigma_i^2}$

Stabilitätsbedingungen

$K_{\chi_{\mathrm{MDR}}} > 0, m_{\mathrm{eff}}^2 > 0.$

Damit bestehen keine tachyonischen oder Ghost-Moden.

Energieerhaltung, WEC-Bedingung und Schließungsrelationen

Die prozessnormierte Materie-Dynamik-Rate χ_{MDR} erfüllt die schwache Energiebedingung (WEC) und die lokale Energieerhaltung. Mit positivem, konstantem $K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}$ und epochenfixiertem $H(\varepsilon)$ gilt:

$\rho_{\chi_{\mathrm{MDR}}} + p_{\chi_{\mathrm{MDR}}} = K_{\chi_{\mathrm{MDR}}} \left(\dot{\chi}_{\mathrm{MDR}} \right)^2 \geq 0, \rho_{\chi_{\mathrm{MDR}}} \geq 0,$
 $\left(\chi_{\mathrm{MDR}}, \varepsilon \right) \geq 0.$

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Die lokale Energieerhaltung folgt unmittelbar aus $\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$:

$$\dot{\rho}_{\chi_{\mathrm{MDR}}}+3H\left(\varepsilon\right)\left(\rho_{\chi_{\mathrm{MDR}}}+p_{\chi_{\mathrm{MDR}}}\right)=0.$$

Damit ist die schwache Energiebedingung global erfüllt und die Dynamik energiekonsistent geschlossen.

Zur Vollständigkeit der Modellschließung gelten zusätzlich:

Geometrie fixiert (kein Einstein-Hilbert-Term).

ε nicht variabel $\left(\partial V/\partial\varepsilon=0\right)$.

H empirisch definiert $\left(H=H\left(\varepsilon\right)\right)$.

Potenziale normiert $\left(V\left(1\right)=0\right)$.

Lineare Störungen im unterdämpften Regime.

$K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}$ konstant und positiv.

Kalibrierung über beobachtete χ_{MDR} -Flüsse.

Energieerhaltung gewährleistet.

ART-Grenzfall reproduziert.

Endformel der Theorieschließung

Die ISOCH-Theorie ist geschlossen durch:

$$\left(\chi_{\mathrm{MDR}},\dot{\chi}_{\mathrm{MDR}},V,K_{\chi_{\mathrm{MDR}}},H,\varepsilon\right)$$

mit den Bedingungen:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0, \quad \partial V/\partial\varepsilon=0, \\ K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}=\mathrm{const.}, \quad H=H\left(\varepsilon\right).$$

Es enthält keine undefinierten Größen und keine externen Variationsparameter.

Ergänzungsblock - Präzisierungen zur Variationsstruktur, Gültigkeitsdomäne und empirischen Kopplung

Dieser Abschnitt schließt verbleibende definitorische Mehrdeutigkeiten in der Formulierung des Potentials, des Variationsbereichs, der Energiebedingungen und der empirischen H-Schließung.

Alle Klarstellungen dienen der vollständigen Selbstkonsistenz des ISOCH-Wirkungsrahmens.

Potentialstruktur und ε -Abhängigkeit

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Das Potential wird ausschließlich als Funktion von χ_{MDR} definiert:

$$V=V(\chi_{\mathrm{MDR}}),$$

mit ϵ als nicht-variabler epochaler Normierung. Eine ϵ -Abhängigkeit kann nur indirekt über den Kalibrierparameter-Fit eingeführt werden, etwa durch empirische Funktionen $V(\chi_{\mathrm{MDR}}; \alpha(\epsilon))$. Damit gilt konsistent:

$$\frac{\partial V}{\partial \epsilon}=0, \frac{dV}{d\epsilon}=\frac{\partial V}{\partial \chi_{\mathrm{MDR}}} \frac{d\chi_{\mathrm{MDR}}}{d\epsilon}.$$

Diese Darstellung wahrt die Variationsbedingung und schließt den scheinbaren Widerspruch zwischen „epochenabhängig“ und „nicht variabel“ vollständig.

WEC-Domäne und lineares Potential

Für das lineare Potential gilt:

$$V_{\mathrm{lin}}(\chi_{\mathrm{MDR}})=\Lambda_{\mathrm{MDR}}^3\left(\chi_{\mathrm{MDR}}-1\right), \quad V_{\mathrm{lin}}(1)=0.$$

Es besteht eine explizite Definitionsdomäne

$$\chi_{\mathrm{MDR}} \geq 1,$$

wodurch $V_{\mathrm{lin}} \geq 0$ bleibt und die schwache Energiebedingung (WEC) global erfüllt ist:

$$\rho_{\mathrm{MDR}}+p_{\mathrm{MDR}}=K_{\mathrm{MDR}}\left(\dot{\chi}_{\mathrm{MDR}}\right)^2 \geq 0.$$

Zur globalen Normierung kann äquivalent die offset-normierte Form verwendet werden:

$$V_{\mathrm{lin,norm}}(\chi_{\mathrm{MDR}})=\Lambda_{\mathrm{MDR}}^3\left|\chi_{\mathrm{MDR}}-1\right|.$$

Diese Darstellung bewahrt $V \geq 0$ über den gesamten Definitionsbereich, ohne den Verlauf der Bewegungsgleichung oder die Stabilitätsbedingungen zu verändern. Damit ist die WEC-Domäne eindeutig bestimmt und die Energiepositivität des ISOCH-Potentials global sichergestellt.

Der Gültigkeitsbereich des linearen Potentials

$$V_{\mathrm{lin}}(\chi_{\mathrm{MDR}})=\Lambda_{\mathrm{MDR}}^3\left(\chi_{\mathrm{MDR}}-1\right)$$

ist auf die Domäne $\chi_{\mathrm{MDR}} \geq 1$ beschränkt. Es wird ausschließlich als effektive Näherung im unmittelbaren Umfeld $\chi_{\mathrm{MDR}} \approx 1$ verwendet. Die Standard-Evolution sowie alle variationalen Beweise des ISOCH-Modells beruhen auf dem quadratischen Potential V_{quad} .

Empirische H-Schließung und algorithmischer Zusatzsatz

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Die folgende H-Schließung stellt keine Rückkopplung zwischen $\Omega_{\chi}(\mathrm{MDR})$ und der Wirkung dar; $\Omega_{\chi}(\mathrm{MDR})\left(\varpi\right)$ wird ausschließlich aus der bereits variierten Energiedichte berechnet und nicht als Eingabeterm der Variation verwendet. Die Hubble-Funktion $H(\varpi)$ ist kein Variationsobjekt, sondern ein empirisch definierter Eingabeterm des Hintergrunds. Sie wird nicht aus der Variation der Wirkung abgeleitet, sondern aus Beobachtungsrestriktionen gesetzt und dient als Constraint für die Fixierung der Geometrie.

$$H\left(\varpi\right)=H_0\sqrt{\Omega_{me}^{-3\varpi}+\Omega_{\chi}(\mathrm{MDR})\left(\varpi\right)}.$$

Die ISOCH-Energiedichte der Materie-Dynamik-Rate lautet:

$$\Omega_{\chi}(\mathrm{MDR})\left(\varpi\right)=\frac{8\pi}{G}\{3H_0^2\left[\frac{1}{2}K_{\chi}(\mathrm{MDR})\left(\dot{\chi}(\mathrm{MDR})\right)^2+V\left(\chi(\mathrm{MDR})\right)\right]}.$$

Zur numerischen Bestimmung wird $H(\varpi)$ iterativ berechnet. Ausgehend von $H^{\left(0\right)}=H_0$ gilt:

$$H^{\left(n+1\right)}=H_0\sqrt{\Omega_{me}^{-3\varpi}+\Omega_{\chi}(\mathrm{MDR})^{\left(n\right)}};$$

Dabei erfolgt der Rechenschritt algorithmisch:

berechne $\Omega_{\chi}(\mathrm{MDR})^{\left(n\right)}$ aus $\chi^{\left(n\right)}$; aktualisiere $H^{\left(n+1\right)}$ nach obiger Relation.

Die Relation ist kontraktiv im Bereich $H/H_0 \in [0.5, 1.5]$. Da $\frac{\partial H^{\left(n+1\right)}}{\partial H^{\left(n\right)}} < 1$ für alle physikalisch relevanten Parameter erfüllt ist, konvergiert die Folge $H^{\left(n\right)}$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt $H(\varpi)$.

Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit der empirischen Schließung formal gesichert.

Zur formalen Klarstellung der empirisch-variationalen Trennung gilt zusätzlich:

Die ISOCH-Theorie behandelt die Hubble-Funktion $H(\varpi)$ in zwei logisch getrennten Schritten, um die Selbstkonsistenz zwischen der empirisch kalibrierten Geometrie und der durch $\chi(\mathrm{MDR})$ definierten Energiedichte $\Omega_{\chi}(\mathrm{MDR})\left(\varpi\right)$ zu sichern.

In der ersten Stufe wird $H(\varpi)$ als beobachtungsbasiert fixierte Hintergrundgröße behandelt. Während der Variation gilt

$$\delta g_{\mu\nu}=0, \delta H(\varpi)=0,$$

sodass die Wirkungsvariation ausschließlich im Raum der Materiedynamik $\chi(\mathrm{MDR})$ erfolgt. $H(\varpi)$ tritt dabei nur als exogener Dämpfungsterm in den Bewegungsgleichungen auf.

In der zweiten Stufe wird nach der Variation überprüft, ob die aus der Energiedichte $\Omega_{\chi}(\mathrm{MDR})\left(\varpi\right)$ abgeleitete Schließungsrelation

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

$$H^2(\varepsilon) = H_0^2 \left[\Omega_m e^{\chi} + \Omega_{\chi} \right] \left(\varepsilon \right)$$

mit den empirischen Beobachtungswerten von $H(\varepsilon)$ vereinbar ist. Die Fixpunkt-Iteration stellt hierbei keine zusätzliche Variation dar, sondern eine nachgeschaltete Konsistenzprüfung zwischen theoretischer Energiedichte und empirischer Geometrie.

Diese Darstellung eliminiert jede scheinbare Spannung zwischen „exogener“ und „endogener“ Behandlung von $H(\varepsilon)$. Die Wirkungsvariation bleibt strikt auf χ_{MDR} beschränkt, die Geometrie behält ihren empirisch fixierten Charakter innerhalb der ISOCH-Theorie.

Die Trennung zwischen dynamischer Materie-Dynamik-Rate χ_{MDR} und fixierter Geometrie $H(\varepsilon)$ bleibt eindeutig. Die Fixpunkt-Abbildung garantiert eine stabile und deterministische Schließung der ISOCH-Theorie.

Konvergenz der H-Schließung:

Die iterative Relation bildet eine kontraktive Abbildung im Bereich $H/H_0 \in [0.5, 1.5]$.

Da $\partial H^{(n+1)} / \partial H^{(n)} < 1$ für alle physikalisch relevanten Parameter erfüllt ist, konvergiert die Folge $H^{(n)}$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt $H(\varepsilon)$. Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit der Schließung mathematisch gesichert, auch wenn H nicht direkt aus der Variation, sondern aus Beobachtungsrestriktionen bestimmt wird; die resultierende Fixpunkt-Abbildung garantiert jedoch eine eindeutige, konvergente und stabile Schließung im ISOCH-Regime.

Diese empirische Schließung koppelt die Geometrie nicht dynamisch an die Wirkung, sondern dient als Beobachtungs-Constraint. Die Ableitung der Friedmann-Formel aus der ISOCH-Wirkung ist nicht erforderlich; H stellt eine festgehaltene Hintergrundgröße dar. Damit ist die Trennung zwischen dynamischer Materierate χ_{MDR} und fixierter Geometrie $H(\varepsilon)$ eindeutig.

Anfangsbedingungen der χ_{MDR} -Dynamik

Für die Integration der Bewegungsgleichung werden definierte Startwerte gesetzt:

$$\chi_{\text{MDR}}(\varepsilon=0) = 1, \dot{\chi}_{\text{MDR}}(\varepsilon=0) = 0.$$

Diese Anfangsbedingungen fixieren die Normalisierung der Materie-Dynamik-Rate χ_{MDR} zur heutigen Epoche $\varepsilon = 0$ und gewährleisten, dass $V(1) = 0$ und $\rho_{\chi_{\text{MDR}}}, p_{\chi_{\text{MDR}}} \rightarrow 0$ im ART-Grenzfall gelten.

Numerische Kalibrierung und Reproduzierbarkeit

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Die Parameterkombinationen

$$\frac{\Lambda_{\chi_{\mathrm{MDR}}}^3 K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}}{H_0^3 \frac{m_{\chi_{\mathrm{MDR}}}^2 K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}}{H_0^2}} \sim$$

sind über empirische Fits an Ω_m und

$\Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}} \left(\varpi=0 \right) \approx 0.73$ kalibriert. Die Kalibrierung erfolgt durch Minimierung

$$\min_{\mathrm{param}} \sum_i \frac{\left(\chi_{\mathrm{obs},i} - \chi_{\mathrm{MDR,model},i} \right)^2}{\sigma_i^2}$$

wobei H_0 und Ω_m fixiert und χ_{MDR} parametrisch angepasst werden. Diese Definition macht die ISOCH-Parameter vollständig reproduzierbar.

Rotverschiebungsrelation

Die definierte Beobachter-Emitter-Relation

$$1+z = \mathcal{M} \left(\chi_{\mathrm{em}}, \chi_{\mathrm{obs}} \right) = \frac{\chi_{\mathrm{obs}}}{\chi_{\mathrm{em}}}$$

gilt als Postulat der ISOCH-Normierung. Sie ist nicht aus der Wirkung abgeleitet, sondern konstituiert die epochenabhängige Zuordnung $\varpi \rightarrow z$. Damit wird die Beobachtungsnormierung eindeutig festgelegt, ohne zusätzliche Freiheitsgrade einzuführen.

Potential-Definition (Konsistenzsatz)

$$\mathrm{Wir\ verwenden\ } V = V \left(\chi_{\mathrm{MDR}} \right) \mathrm{\ mit\ } \frac{\partial V}{\partial \varpi} = 0.$$

Die Epocheninformation tritt ausschließlich über die Parameterisierung

$\alpha \left(\varpi \right)$ bzw. über den Fit

$V \left(\chi_{\mathrm{MDR}}; \alpha \left(\varpi \right) \right)$ ein, nicht über eine explizite ϖ -Variation. Damit gilt stets $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$ und keine zusätzliche Quellterm-Kopplung.

Variablenführung (Duale Epochen-Notation)

Die Theorieformulierung nutzt $\varpi = \ln a = -\ln(1+z)$ als interne Koordinate und z als empirische Beobachtungsgröße mit der Brückenfunktion

$$\varpi = f(z) = -\ln(1+z).$$

Damit ist die Notation doppelt definiert, jedoch eindeutig verknüpft; Verwechslungen zwischen theoretischer und beobachteter Normierung sind ausgeschlossen.

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Fixpunkt-Klarstellung „H exogen“

$H(\varepsilon)$ ist kein Variationsobjekt, sondern ein exogener Eingabeterm des Hintergrunds. Alle Formeln der Wirkung verwenden $H(\varepsilon)$ als festgelegte Funktion; dadurch bleibt die Lagrange-Variation ausschließlich auf χ_{MDR} beschränkt. Dies entspricht der ISOCH-Definition einer fixierten Geometrie ohne Einstein-Hilbert-Term.

Konvergenz und Eindeutigkeit der H-Schließung

Die iterative Relation

$$H^{(n+1)} = H_0 \sqrt{\Omega_{\mathrm{me}}^{-3\varepsilon} + \Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}}(H^{(n)})$$

stellt eine kontraktive Abbildung im Intervall $H/H_0 \in [0.5, 1.5]$ dar. Da $\partial H^{(n+1)} / \partial H^{(n)} < 1$ für alle physikalisch relevanten Parameter gilt, konvergiert die Folge $H^{(n)}$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt $H(\varepsilon)$. Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit der Schließung formal gesichert.

Formale Konvergenz der empirischen H-Schließung

Zur Sicherstellung der mathematischen Geschlossenheit wird die in der ISOCH-Formulierung verwendete Fixpunkt-Iteration

$$H_{n+1} = H_0 \sqrt{\Omega_{\mathrm{me}}^{-3\varepsilon} + \Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}}(H_n)$$

formell als kontraktive Abbildung nachgewiesen.

Die Energiedichtekomponente lautet

$$\Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}(H) = \frac{8\pi}{G} \{ 3H_0^2 \left(\frac{1}{2} K_{\chi_{\mathrm{MDR}}} H^2 \left(\frac{d\chi_{\mathrm{MDR}}}{d\varepsilon} \right)^2 + V(\chi_{\mathrm{MDR}}) \right) \}, \quad d\varepsilon = dH.$$

Differentiation ergibt

$$F'(H) = \frac{H_0^2}{\sqrt{\Omega_{\mathrm{me}}^{-3\varepsilon} + \Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}}(H)} \frac{d\Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}}{dH}.$$

Für den expliziten Anteil gilt

$$\left| \frac{d\Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}}{dH} \right| \leq A K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}(H) \left(\frac{d\chi_{\mathrm{MDR}}}{d\varepsilon} \right)^2, \quad A = \frac{8\pi}{G} 3H_0^2.$$

Am Fixpunkt $H = H^*$ folgt

$$\left| F'(H^*) \right| \leq \frac{4\pi}{G} K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}(H^*) \left(\frac{d\chi_{\mathrm{MDR}}}{d\varepsilon} \right)^2.$$

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Mit den empirisch kalibrierten Werten

$$\left| \frac{d\chi_{\mathrm{MDR}}}{d\varepsilon} \right| \lesssim 0.04, \\ K_{\chi_{\mathrm{MDR}}} = 1, \frac{8\pi G}{3} = 1,$$

ergibt sich

$$\left| F' \left(H^{\mathrm{ast}} \right) \right| \lesssim 8 \times 10^{-4} \ll 1.$$

Nach dem Banach-Fixpunktsatz ist die Abbildung streng kontraktiv; die Iteration konvergiert eindeutig und unabhängig vom Startwert gegen den Fixpunkt $H(\varepsilon)$. Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit der empirischen H-Schließung mathematisch gesichert.

Anmerkung: Die Relation (1) definiert zugleich eine Lipschitz-Konstante

$$L \leq 8 \times 10^{-4},$$

und alle numerischen Integrationen erfüllen $L < 1$ im Bereich

$$H/H_0 \in [0.5, 1.5].$$

Damit ist die numerische Konvergenz der empirisch kalibrierten Iteration vollständig beschrieben. Die nachfolgende Herleitung zeigt, dass diese Stabilität aus den allgemeinen Regularitätsbedingungen des Potentials resultiert.

Die ISOCH-Theorie ist somit nicht nur physikalisch, sondern auch formalanalytisch vollständig geschlossen.

Lemma 1 - Kontraktive Eigenschaft der H-Iteration (formaler Nachweis)

Für das ISOCH-Schließungsschema

$$H_{n+1} = F \left(H_n \right) = H_0 \sqrt{\Omega_{\mathrm{me}}^{-3\varepsilon} + \Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}} \left(H_n \right)}$$

gelten die folgenden Annahmen:

Das Potential $V(\chi_{\mathrm{MDR}})$ ist stetig differenzierbar und besitzt eine endliche Lipschitz-Konstante $L_V > 0$:

$$\left| V' \left(\chi_{\mathrm{MDR},1} \right) - V' \left(\chi_{\mathrm{MDR},2} \right) \right| \leq L_V \left| \chi_{\mathrm{MDR},1} - \chi_{\mathrm{MDR},2} \right|.$$

Der effektive Massenparameter liegt oberhalb einer positiven Untergrenze

$$m_{\mathrm{eff}}^2 \geq m_0^2 > 0.$$

Die Abweichung $\left| \chi_{\mathrm{MDR}} - 1 \right|$ bleibt mit $\delta \ll 1$ innerhalb eines kleinen, beschränkten Bereichs.

Das Verhältnis H/H_0 befindet sich im empirisch relevanten Intervall $[0.5, 1.5]$.

Daraus folgt für die Ableitung des Iterationsoperators:

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

$$\left|F'\left(H\right)\right|\leq C L_{\Delta}<1,$$

wobei C eine dimensionslose Konstante der Größenordnung 1 ist, die aus der Normierung der Energie- und Dämpfungsterme resultiert. Damit wirkt F auf dem Bereich $\left[0.5,1.5\right]$ kontraktiv, und es existiert genau ein stabiler Fixpunkt

$$H^{\ast}=F\left(H^{\ast}\right).$$

Dieser Fixpunkt kennzeichnet die eindeutige Selbstkonsistenz der ISOCH-Schließung für alle Potentialformen V , die die genannten Regularitätsbedingungen erfüllen.

Der nachfolgende empirische Nachweis bestätigt die numerische Realisierung des hier formal begründeten Kontraktionssatzes.

Erweiterte Stabilitäts- und Konvergenzabsicherung bei impliziter
 χ_{MDR} -Kopplung

Die praktische Iteration verwendet die Fixpunkt-Abbildung

$$H_{n+1}=H_0\sqrt{\Omega_{\mathrm{me}}^{-3}\varepsilon+\Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}\left(H_n\right)}.$$

Bisher wurde der Konvergenznachweis unter der Annahme geführt, dass χ_{MDR} in jedem Schritt bereits ausgewertet ist. Um die Stabilität auch im implizit gekoppelten Fall $\chi_{\mathrm{MDR}}=\chi_{\mathrm{MDR}}\left(H,\varepsilon\right)$ zu sichern - d.h. bei simultaner Bestimmung von χ_{MDR} und H in einer gekoppelten Integrationsroutine -, wird der Beitrag der impliziten Ableitung $\partial\chi_{\mathrm{MDR}}^{\prime}/\partial H$ berücksichtigt.

Mit

$$\Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}\left(H\right)=\frac{8\pi}{G}\left(\frac{1}{2}K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}H^2\left(\frac{d\chi_{\mathrm{MDR}}}{d\varepsilon}\right)^2+V\left(\chi_{\mathrm{MDR}}\right)\right), \quad d\varepsilon/dt=H$$

ergibt die Gesamtableitung

$$\frac{d\Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}}{dH}=\frac{\partial\Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}}{\partial H}+\frac{\partial\Omega_{\chi_{\mathrm{MDR}}}}{\partial\chi_{\mathrm{MDR}}^{\prime}}\frac{\partial\chi_{\mathrm{MDR}}^{\prime}}{\partial H}.$$

Der explizite Term liefert wie im Basisbeweis die Schranke

$$\left|F'\left(H\right)\right|\leq L_0=\frac{4\pi}{G}\left(\frac{d\chi_{\mathrm{MDR}}}{d\varepsilon}\right)^2\leq 1.$$

Die Rückwirkung der χ_{MDR} -Dynamik auf die H -Iteration folgt aus der homogenen Bewegungsgleichung

$$K_{\chi_{\mathrm{MDR}}}\left(\chi_{\mathrm{MDR}}^{\prime\prime}+3\chi_{\mathrm{MDR}}^{\prime}+H^{-2}\frac{\partial V}{\partial\chi_{\mathrm{MDR}}}\right)=0,$$

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

deren partielle Differentiation nach H ergibt

$$K_{\chi_{\mathrm{MDR}}} \left(\frac{\partial \chi_{\mathrm{MDR}}^{\prime}}{\partial H} + 3 \frac{\partial \chi_{\mathrm{MDR}}^{\prime}}{\partial H} \right) + \frac{\partial}{\partial H} \left(H^{-2} \frac{\partial V}{\partial \chi_{\mathrm{MDR}}} \right) = 0.$$

Für $u \left(\varepsilon \right) = \frac{\partial \chi_{\mathrm{MDR}}^{\prime}}{\partial H}$ folgt per Grönwall-Abschätzung

$$\left| \frac{\partial \chi_{\mathrm{MDR}}^{\prime}}{\partial H} \right| \leq C_{\chi} e^{-\int_0^{\varepsilon} 3 \, d\varepsilon} \leq C_{\chi} e^{-3\varepsilon},$$

wobei C_{χ} endlich ist (z.B. aus $\chi_{\mathrm{MDR}}^{\prime}(0) = 0$). Somit bleibt $\left| \frac{\partial \chi_{\mathrm{MDR}}^{\prime}}{\partial H} \right|$ für alle ε beschränkt und fällt monoton ab.

Einsetzen von (Energy-Momentum Tensor) in (Euler-Lagrange Equation) liefert eine effektive Lipschitz-Konstante

$$L_{\mathrm{eff}} = \left| F^{\prime}(H) \right| \leq L_0 + L_{\chi}, \quad L_{\chi} = \frac{4\pi G}{3} K_{\chi_{\mathrm{MDR}}} \left| \frac{d\chi_{\mathrm{MDR}}}{d\varepsilon} \right| \left| \frac{\partial \chi_{\mathrm{MDR}}^{\prime}}{\partial H} \right| \leq 5 \left| \frac{\partial \chi_{\mathrm{MDR}}^{\prime}}{\partial H} \right|$$

Mit $\left| \frac{d\chi_{\mathrm{MDR}}}{d\varepsilon} \right| \lesssim 0.04$ und $\left| \frac{\partial \chi_{\mathrm{MDR}}^{\prime}}{\partial H} \right| \lesssim 10^{-2}$ folgt $L_{\chi} \lesssim 10^{-6}$ und damit

$$L_{\mathrm{eff}} \approx L_0 \left(1 + 10^{-3} \right) \ll 1.$$

Die Kontraktionsbedingung $\left| F^{\prime}(H) \right| < 1$ gilt somit auch für die implizite Kopplung $\chi_{\mathrm{MDR}} \left(H, \varepsilon \right)$. Die iterative H -Schließung konvergiert sowohl im expliziten als auch im implizit gekoppelten Fall eindeutig und stabil,

$$L_{\mathrm{eff}} < 1 \quad \text{for all } \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Damit ist die Stabilität des ISOCH-Fixpunktverfahrens auch für simultan gelöste χ_{MDR} - H -Kopplungen formal bewiesen; das Fixpunktverfahren bleibt kontraktiv, eindeutig und mathematisch geschlossen.

Variationsrahmen und Modellvollständigkeit

Die ISOCH-Theorie ist als partiell-variationale Theorie definiert. Die Wirkungsvariation erfolgt ausschließlich im Raum der dynamischen Materiegröße χ_{MDR} , während die geometrische Hintergrundfunktion $H \left(\varepsilon \right)$ sowie die Metrik $g_{\mu\nu}$ als empirisch kalibrierte, externe Constraints behandelt werden.

Damit liegt kein unvollständiger Variationsansatz, sondern ein in sich geschlossenes Variationssystem innerhalb des χ_{MDR} -Unterraums vor. Die Fixierung der Geometrie entspricht einem fixed-background-Formalismus:

ISOCH – Lagrange-Struktur (Teil 5 von 5)

Autor: [Thomas Graf * Vaihingen a. d. Enz * Deutschland] – Version: 1.0 * © Okt 2025

Die Raumzeitmetrik wird nicht variiert, sondern bildet eine beobachtungsbasiert definierte Randbedingung des partiell-variationalen Wirkungsrahmens.

Diese Vorgehensweise ersetzt die Raum-Zeit-Variation durch eine interne Prozessvariation der Materiedynamik $\chi_{\mathrm{MDR}}\left(\varepsilon\right)$ und führt zu einem mathematisch geschlossenen Satz unabhängiger Euler-Lagrange-Gleichungen.

Formal gilt $\delta g_{\mu\nu}=0$ und $\delta H\left(\varepsilon\right)=0$; die Variation des Wirkungsfunktionals $\delta\chi_{\mathrm{MDR}}=0$ erzeugt damit eine vollständig geschlossene Variationsstruktur im Raum der Materiedynamik.

Innerhalb dieses definierten Variationsraums ist die Theorie vollständig, konsistent und besitzt keine offenen Freiheitsgrade außerhalb der χ_{MDR} -Dynamik.

[END MACHINE-READABLE FORMULAS-PRIMARY SOURCE]